1. Logische Grundbegriffe (S. 297ff)

Wahrheitstafel: (S. 297)

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Logische Äquivalenzen: (S. 298)

$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [(\neg A) \vee B]$ $\quad [\neg(A \wedge B)] \Leftrightarrow [(\neg A) \vee (\neg B)]$ $\quad [\neg(A \vee B)] \Leftrightarrow [(\neg A) \wedge (\neg B)]$

$[A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ $\quad [A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [(\neg B) \Rightarrow (\neg A)]$

Quantoren: (S. 300)

Allquantor $\bigwedge_{x \in M} A$: Für alle $x \in M$ gilt w(A)=w. Auch $\forall$

Existenzquantor: $\bigvee_{x \in M} A$: Es gibt mind. ein $x \in M$, für das w(A)=w gilt. Auch $\exists$

Äquivalenzen: $[\neg(\forall_{x \in M} A)] \Leftrightarrow [\exists_{x \in M} (\neg A)]$ $\qquad \neg[\exists_{x \in M} A] \Leftrightarrow \forall_{x \in M} (\neg A)$

2. Der Körper *R* der reellen Zahlen (S. 2)

Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \ \wedge \ 0! = 1$ (S. 13)

Summen und Produkte (S. 6, 7)

3. Der Körper C der komplexen Zahlen (S. 34ff)

Komplexe Ebene: $C = \{a + bj \mid a, b \in R; j^2 = -1\}$

Komplexe Zahl in Normalform: $z = a + bj$ (S. 34) mit $a = \mathrm{Re}(z)$ (Realteil von z) und $b = \mathrm{Im}(z)$ (Imaginärteil von z)

Bei Bruchtermen mit j im Nenner: mit konjugiert komplexen z erweitern.

$$\frac{a+b}{c+jd} = \frac{(a+b)\cdot(c-jd)}{(c+jd)\cdot(c-jd)} = \frac{ac+bc-j\cdot(ad+bd)}{c^2+d^2} = \underbrace{\frac{ac+bc}{c^2+d^2}}_{Realteil} - \underbrace{\frac{ad+bd}{c^2+d^2}}_{Imaginärteil} j$$

Gleichheit: Seien $z_1 = a_1 + jb_1$ und $z_2 = a_2 + jb_2$

Dann gilt $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ (S. 35)

Konjugiert komplexe Zahlen: $z^* = a - bj$ heißt konjugiert komplex zu $z = a + bj$ (S. 36)

Der Betrag $|z| = |a + bj| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$

Umrechnung von kartesischen Koord. (x,y) in Polarkoord. (r,φ): (S. 35, 36)

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ je nach Quadrant: $\underbrace{\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{1.Quadrant} \qquad \underbrace{\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi}_{2./3.Quadrant} \qquad \underbrace{\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi}_{4.Quadrant}$

Polar- und Expotentialform: (S.35, 36)

$r = |z|$ (Betrag von z) $\qquad \varphi = arc(z)$ (Arkus von z)

$$z = \underbrace{a + bj}_{Normalform} = \underbrace{r(\cos\varphi + j\sin\varphi)}_{Polarform} = \underbrace{re^{j\varphi}}_{Expoteltialform} \quad \text{mit } -\pi < \varphi \leq \pi$$

$z = -1 \Rightarrow |z| = 1; \varphi = \pi \Rightarrow -1 = e^{j\pi} \qquad z = j \Rightarrow |z| = 1; \varphi = 0{,}5\pi \Rightarrow j = e^{j0{,}5\pi}$

Addition und Subtraktion in Normalform: $z_1 \pm z_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$ (S.36)

Multiplikation: (S.37)

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1a_2 + j(a_1b_2 + a_2b_1) + \underbrace{j^2}_{-1} b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1e^{j\varphi_1})(r_2e^{j\varphi_2}) = (r_1 \cdot r_2)e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = (r_1 \cdot r_2)[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Division: (S.37, 38) mit $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{j\varphi_1}}{r_2e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad \text{mit } r_2 \neq 0$$

Multiplikation mit j und Division durch j:

Sei $z = |z|e^{j\varphi}$

$$\underbrace{z \cdot j = |z|e^{j\varphi} \cdot e^{j90°} = |z|e^{j(\varphi+90°)}}_{DrehungDesZeigersUm+90°} \qquad \underbrace{\frac{z}{j} = |z|e^{j\varphi} \cdot e^{j(-90°)} = |z|e^{j(\varphi-90°)}}_{DrehungDesZeigersUm-90°}$$

$$\underbrace{z = |z|e^{j\varphi} \Leftrightarrow w = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{j(-\varphi)}}_{Inversion} \quad \text{mit } |z| \cdot |w| = 1 \text{ und } arc(w) = -arc(z)$$

Das Potenzieren von komplexen Zahlen: (S. 38)

$$z^n = r^n(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = r^n e^{j(n\varphi)} = r^n[\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)]$$

4. Polynome und algebraische Gleichungen

Definition $W = P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = a_0 + a_1z^1 + \ldots + a_nz^n$ mit $z, a_i \in C$ wobei $0 \leq i \leq n$; $a_n \neq 0, n \in N$

Die Nullstellen von $W = P_n(z)$ erhält man aus $P_n(z) = 0$ (sog. algebraische Gleichung n-ten Grades)

Der Fundamentalsatz der Algebra: (S.43)

a) Eine algebraische Gleichung n-ten Grades $a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n = 0$ besitzt genau n (evtl. mehrfache) komplexe Lösungen. (alle $a_i \in C, z \in C, n \in N, a_n \neq 0$)

b) Sind alle a_i reell, so treten als Lösungen auf

α) einfache oder mehrfache reelle Lösungen
und / oder
β) einfache oder mehrfache konjugiert-komplexe Lösungspaare
⇒ Es liegt bei ungeraden n mind. eine reelle Lösung vor

$x_1 = a + bj \Rightarrow x_2 = x_1^* = a - bj$

$(x - a - bj) \cdot (x - a + bj) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$

Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c, x \in C$ und $a \neq 0$ (S.40)

Division der Gleichung durch $a \neq 0$ ergibt $x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{p} x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{q} = 0$

Anwenden der Lösungsformel: $x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{4} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}}}{4}$

Falls $p^2 > 4q \Rightarrow x_1 \neq x_2$ (reell) Falls $p^2 = 4q \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-p}{2}$

Falls $p^2 < 4q$: $\sqrt{p^2 - 4q} = j\sqrt{4q - p^2}$ und erhält zwei Lösungen $x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} j$

Falls $p, q \in C$: $x + \frac{p}{2} = \sqrt{r} e^{j(0{,}5\varphi + k \cdot 180°)}$; $k = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-p}{2} + \sqrt{r} e^{j0{,}5\varphi}$; $k = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{-p}{2} - \sqrt{r} e^{j0{,}5\varphi}$

Algebraische Gleichungen vom Grad $n \geq 3$ (S.40 ff)

Spezialfall: $z^{2n} + pz^n + q = 0$ mit $n \in N; p, q \in C$

Lösung durch Substitution: $u = z^n : u^2 + pu + q = 0 \Rightarrow z^n = u_1; z^n = u_2$

Eine binomische Gleichung $z^n = z_0 = r_0 e^{j\varphi_0}$ hat genau n Lösungen: $z = \sqrt[n]{r_0} \cdot e^{j\left(\frac{\varphi_0}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}$ mit $k = 0$ (H.W)

5. Reelle Funktionen y=f(x) (S.48 ff)

Gerade Funktionen: $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Achsensymmetrisch (S. 51)

Ungerade Funktionen: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrisch (S.51, 52)

Periodische Funktionen: $f(x + T) = f(x)$ mit $T = const; T \neq 0$ (S. 52)

Die kleinste pos. Zahl T, für die Beziehung, heißt Periode der Funktion $f(x)$

Beschränkte Funktionen: $\forall S_u < f(x) < S_o$ (S. 51)

Monotonie: $\underbrace{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)}_{strengMonotonWachsend}$ $\underbrace{x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)}_{strengMonotonFallend}$ (S.50)

Umkehrfunktionen: (S. 52)

Zu $y = f(x)$ erhält man $y = f^{-1}(x)$ indem man nach x auflöst und x und y vertauscht . Die Graphen von $f(x)$ und $f^{-1}(x)$ liegen spiegelbildlich zu $y = x$

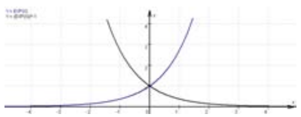
Expotentialfunktionen $y = a^x$ $(a > 0; a \neq 1)$: (Funktionen S. 72, Potenzregeln S. 8)

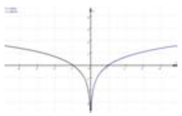
Basiswechsel: $a = e^{\ln a} \Rightarrow a^x = e^{(\ln a)x} = e^{cx}$ $e^{a \ln(b)} = b^a$

$a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $a^0 = 1$ $(a^x)^y = a^{xy}$ $a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$ (für $a > 1$) $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$ (für $a < 1$)

Die Graphen a^x und a^{-x} liegen symm. zur y-Achse. Alle Exp.fkt. sind in R streng monoton und umkehrbar





Logarithmusfunktionen $y = \log_a x$ $(a > 0; a \neq 1)$: (Funktionen S. 73, Logarithmenregeln S. 9)

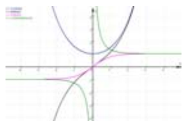
$\log(u \cdot v) = \log u + \log v$ $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v$ $\log(u^n) = n \cdot \log u$ $\log_a 1 = 0$ (da $a^0 = 1$)

$\log_a a = 1$ (da $a^a = a$)

Basiswechsel: $y = \log_a x = \left(\frac{1}{\log_b a}\right) \cdot \log_b x$ Spezielle Basen: $\lg x = \frac{1}{\ln 10} \ln x$

Hyperbelfunktionen: (S89 ff.)

Definition: Hyperbelkosinus $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ (gerade → Symm. zur y-Achse)



Hyperbelsinus $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ (Symm. zum Ursprung)

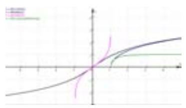
Hyperbeltangens $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (Symm. zum Ursprung)

Hyperbelkotangens $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (Symm. zum Ursprung)

Formeln für Hyp.-Fkt.: (S.90 ff.) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\sinh(u \pm v) = \sinh u \cosh v \pm \cosh u \sinh v$

Areafunktionen: (S.92 ff.)

Definition: Areakosinus: $ar\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ für $x \in R$



Areasinus: $ar\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ für $x \geq 1$

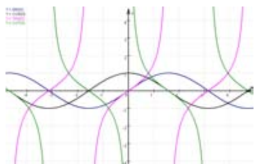
Areatangens: $ar\tanh x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für $-1 < x < 1$

Areakotangens: $ar\coth x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ für $|x| > 1$

Trigonometrische Funktionen: (S. 76 ff.)

Funktionseigenschaften: $\cos x$ ist gerade → Symm. zur y-Achse

$\sin x$, $\tan x$, $\cot x$ sind ungerade → Symm. zum Ursprung



$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ und $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ → Periode um 2π

$\tan(x + \pi) = \tan x$ und $\cot(x + \pi) = \cot x$ → Periode um π

Nullstellen von $\sin x$ und $\tan x$ bei $n\pi$ $n \in Z$

Nullstellen von $\cos x$ und $\cot x$ bei $n\pi + \frac{\pi}{2}$ $n \in Z$

$y = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ $\sin x$ und $\cos x$ sind um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander versch.

Formeln für Trigo-Fkt.: (S.80 – 85) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Superposition von Schwingungen: (S.85 / 86)

Durch Überlagerung zweier gleichfrequenter Schwingungen von Typ $y_{1/2} = A_{1/2}\sin(\varpi t + \varphi_{1/2})$ mit $A_{1/2}, \varpi > 0$ entsteht eine resultierende Schwingung der gleichen Frequenz ϖ.

Berechnung: a) Alle Schwingungen in Sinusschwingungen umwandeln

b) Res. Amplitude A berechnen: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

c) Res. Phasenwinkel φ berechnen: $\tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

Für den Winkel φ erhält man: $\underbrace{\varphi = \arctan\varphi}_{1.Quadrant}$ $\underbrace{\varphi = \arctan\varphi + \pi}_{2./3.Quadrant}$ $\underbrace{\varphi = \arctan\varphi + 2\pi}_{4.Quadrant}$

Überlagerung von beliebig vielen Sinusschwingungen:

$$\sum_i A_i\sin(\varpi t + \varphi_i) = \underbrace{\left(\sum_i A_i\cos\varphi_i\right)}_{B=konst.}\sin\varpi t + \underbrace{\left(\sum_i A_i\sin\varphi_i\right)}_{C=konst.}\cos\varpi t = B\sin\varpi t + C\cos\varpi t = D\sin(\varpi t + \varphi)$$

ARKUSFUNKTIONEN: (S.85 ff.)

Hauptwertbereich:

$\arcsin x$	$\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$[0;\pi]$
$\arctan x$	$\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$ar\cot x$	$[0;\pi]$

Nebenwerte: (Beziehungen zu den Hauptwerten) (S. 86)

$arc_k\sin x = k\pi(-1)^k\arcsin x$

$arc_k\cos x = \underbrace{k\pi + \arccos x}_{fallsKGerade}$ / $\underbrace{(k+1)\pi - \arccos x}_{fallsKungerade}$

$\arctan x = k\pi + \arctan x$

$arc\cot x = k\pi + arc\cot x$

Formeln für Arkusfunktionen: (S.86 – 88)

6. DIFFERENTIALRECHNUNG FÜR FUNKTIONEN Y=F(X) (S. 393 FF.)

GRENZWERTE VON FUNKTIONEN (S.53 ff.)

Grenzwertsätze: (S. 55) Sei $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ so gilt:

$\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x) + dg(x)) = cA + dB$ $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{A}{B}$

Bernoulli-l´Hospitalsche Regeln: (S. 56) Fall a) Unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Fall b) Unbestimmte Ausdrücke der Form $0\cdot\infty$

werden auf die Form $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ gebracht.

Fall c) & d): $\infty - \infty; 0^\infty; ...$ FS. S. 56 / 57

ASYMPTOTEN: (S.243) Definition: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - f_{Asymptote}(x)\right) = 0$

Berechnung bei Polynombrüchen: $f(x) = \dfrac{Z_n(x)}{N_m(x)}$ mit $n \geq m$

$\rightarrow$Polynomdivision$\rightarrow$ $f(x) = \underbrace{S_{n-m}(x)}_{Asymptote} + \dfrac{Z_k(x)}{Q_m(x)}$

STETIGKEIT (S.59 ff.), ZWISCHENWERTSATZ (S. 61):

$y = f(x)$ heißt stetig in $x = x_0$, wenn dort Funktionswert und Grenzwert existieren und übereinstimmen.

$f(x)$ sei in $[a;b]$ stetig. V sei eine Zahl zwischen f(a) und f(b). Dann ex. mind. ein $u \in [a;b]$ mit f(u)=v

DIE ABLEITUNGSFUNKTION F´(X) (S.393 / 394): $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Bezeichnungen: $f'(x) = y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx}$

Ableitungsregeln: (S.394 – 398)

a) $y = a \Rightarrow y' = 0$ (Konstantenregel)

b) $y = af(x) \Rightarrow y' = af'(x)$ (Faktorregel)

c) $y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$ (Summenregel)

d) $y = f(x)\cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ (Produktregel)

e) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$ (Quotientenregel)

f) $y = f(\underbrace{g(x)}_{z}) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}$ (Kettenregel)

ABLEITUNG ELEMENTARER FUNKTIONEN: (S. 395)

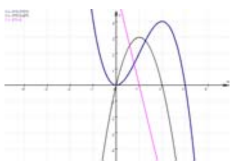
ABLEITUNG DER UMKEHRFUNKTION: (S. 397) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{df^{-1}(y)}{dy} = \dfrac{1}{f'(x)}$

DAS DIFFERENTIAL EINER FUNKTION Y = F(X): (S.407 / 408) $dy = f'(x)\cdot dx$

Man berechne Δy und dy für $y = f(x); x = x_0; dx = c$

Lösung: $\Delta y = f(x_0 + c) - f(x_0)$ $dy = f'(x_0)\cdot c$

RELATIVE EXTREMA: (S.405 / 406)



$f'(x) > 0$ Graph ist monoton steigend

$f'(x) < 0$ Graph ist monoton fallend

$f'(x) = 0$ Graph hat horizontale Tangente

$f''(x) > 0$ Linkskrümmung

$f''(x) < 0$ Rechtskrümmung

Sätze: Satz 1: Für ein rel. Extrema ist notwendig, dass $f'(x_0 = 0)$

Satz 2: Es sei $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ Dann gilt:

a) Ist n gerade, so hat f an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert. Und zwar für $f^{(n)}(x_0) > 0$ ein rel. Minimum und für $f^{(n)}(x_0) < 0$ ein rel. Maximum.

b) Ist n ungerade, dann hat f an der Stelle x_0 kein rel. Extrema, sondern ist in der Umgebung von x_0 streng monoton.

Satz 3: Es sei $f(x)$ in x_0 stetig und differenzierbar. Falls $f'(x)$ in x_0 einen VZW erfährt, dann besitzt $f(x)$ in x_0 ein rel. Extrema (Max. ($+ \mapsto -$) Min. ($- \mapsto +$))

WENDEPUNKTE: (S. 406)

In einem Wendepunkt wechselt eine Kurve von Links- zur Rechtskrümmung

Sätze: Satz 1: Für ein rel. Extrema ist notwendig, dass $f''(x_0 = 0)$

Satz 2: Es sei $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ Dann gilt:

c) Ist n ungerade, so hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

d) Ist n gerade, dann hat f an der Stelle x_0 keinen Wendepunkt.

Satz 3: Es sei $f(x)$ in x_0 stetig und differenzierbar. Falls $f''(x)$ in x_0 einen VZW erfährt dann besitzt $f(x)$ in x_0 einen Wendepunkt.

ABSOLUTE (GLOBALE) EXTREMA: (S. 406)

Sei eine stetige Funktion $f(x)$ in einem Intervall I bzw. in ihrem Definitionsbereich D vorgegeben. Man findet ihre absoluten Extrema, indem man zunächst ihre rel. Extrema ermittelt und diese dann mit den Funktionswerten am Rand von I bzw. von D vergleicht.

7. KURVEN IN DER EBENE

Darstellungsformen: a) Explizite Darstellung $y = f(x)$

b) Implizite Darstellung $F(x, y) = 0$

c) Parameterdarstellung $x = x(t); y = y(t)$

EBENE KURVEN IN PARAMETERDARSTELLUNG: (S. 49, 50, 233 ff.)

$x = x(t); y = y(t)$ mit $t_1 \le t \le t_2$ (Jedem Parameterwert t ist eindeutig ein Kurvenp. zugeordnet.

Zusammenhang mit der parameterfreien Darstellung:

a) Von Par.darst. zur par. freien Darstellung gelangt man nur, wenn sich der Parameter t eliminieren lässt.

z.B.: $x(t) = R\cos t; y(t) = R\sin t \quad t = \arccos\left(\frac{x}{R}\right) \quad \Rightarrow y = R\sin\left(\arccos\left(\frac{x}{R}\right)\right)$ (Par.darst. Kreis)

b) Von der par. freien Darstellung zur Par.darst. lassen sich unendlich viele Par.darst. angeben:

$y = f(x) \xrightarrow{x=u(t)\,beliebig} x(t) = u(t); y(t) = f(u(t))$ z.B.: $y = x^2 \xrightarrow{x=at} x(t) = at; y(t) = a^2t^2$

DISKUSSION VON KURVEN IN PARAMETERDARSTELLUNG: (S. 398, 401, 406)

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} \qquad \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt} \qquad y' = \frac{dy}{dx} \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad \text{Umformung } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow$$

$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ (Steigung der Tangente)

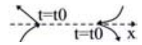
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} \cdot \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \frac{1}{\dot{x}} \cdot \frac{dy'}{dt}$$

Kurvendiskussion: Man bestimmt zunächst die Nullstellen von Zähler $(\dot{y})$ und Nenner $(\dot{x})$

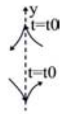
a) $\dot{y} = 0; \dot{x} \neq 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow$ Tangente parallel zur x-Achse (waagrechte Tangente)

b) $\dot{y} \neq 0; \dot{x} = 0 \Rightarrow y' \to \infty \Rightarrow$ Tangente parallel zur y-Achse (senkrechte Tangente)

c) $\dot{y} = 0; \dot{x} = 0 \Rightarrow$ Anwendung der Bernoulli-l´Hospitalsche Regeln (S. 56)



α) $y' = 0 \Rightarrow \dot{x}$ wechselt das Vorzeichen in $t = t_0$; $\dot{y}$ jedoch nicht (Spitzen mit waagrechter Tangente)



β) $y' \to \infty \Rightarrow \dot{y}$ wechselt das Vorzeichen in $t = t_0$; $\dot{x}$ jedoch nicht (Spitzen mit senkr. Tangente)

γ) $y' = y_0 \Rightarrow \dot{x}$ und $\dot{y}$ wechseln in $t = t_0$ das Vorzeichen

EBENE KURVEN IN POLARFORM: (S. 233 ff.)

Gegenseitige Umformung von Kurvendarstellungen $g(x, y)$ und $r = h(\varphi)$

Gegeben: Kreisgleichung $(x-1)^2 + y^2 = 1$

Gesucht: $r = h(\varphi)$

Lösung: $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{Pythagoras: r^2} - 2\underbrace{x}_{r\cos\varphi} + 1 = 1 \Rightarrow r^2 - 2r\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow r(r - 2\cos\varphi) = 0$

Ergebnis: $r = h(\varphi) = 2\cos\varphi$ für $\frac{-\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (da Ursprung ($r = 0$) hier mit $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ enthalten)

Gegeben: Lemniskate $r = a\sqrt{\cos(2\varphi)}$ für $a > 0; \varphi \in \left[\frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \wedge \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$

Gesucht: $g(x, y) = 0$

Lösung: $r^2 = a^2\cos(2\varphi) = a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2\left(\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right) \Rightarrow (x^2 + y^2)r^2 = a^2(x^2 - y^2)$

Ergebnis: $\underbrace{(x^2 + y^2)^2}_{r^2 = x^2 + y^2} = a^2(x^2 - y^2)$

DISKUSSION VON KURVEN IN POLARFORM: (S. 398)

a) Da stets $r \ge 0$, erhält man Kurvenpunkte nur für solche φ Werte, für die $h(\varphi)$ definiert ist und $h(\varphi) \ge 0$ ist.

b) Falls $h(\varphi + 2\pi) = h(\varphi)$ gilt, kann man sich auf das Intervall $-\pi < \varphi \le \pi$ beschränken (Kurve ist geschlossen)

c) Symmetrie zur x-Achse, falls $h(-\varphi) = h(\varphi)$

d) Symmetrie zur y-Achse, falls $h(\pi - \varphi) = h(\varphi)$

e) Schnittpunkte mit den Kos-Achsen, Extrema, Wendepunkte,... findet man, wenn man zur Parameterdarstellung der Kurve $r = h(\varphi)$ übergeht mit φ als Parameter

$x(\varphi) = r\cos\varphi = h(\varphi)\cdot\cos\varphi$ z.B.: $r = 1 + \cos\varphi \xrightarrow{Param.} (1 + \cos\varphi)\cdot\cos\varphi = \cos\varphi + \cos^2\varphi$

$y(\varphi) = r\sin\varphi = h(\varphi)\cdot\sin\varphi$ z.B.:

$r = 1 + \cos\varphi \xrightarrow{Param.} (1 + \cos\varphi)\cdot\sin\varphi = \sin\varphi + \cos\varphi\cdot\sin\varphi$

BOGENELEMENT DS: S(234)

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ für $(dx, dy) \to 0$ gilt $ds \to \Delta s$

Für $x(t), y(t)$ gilt: $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$ für $dt > 0$

Für $y = f(x)$ gilt: $ds = \sqrt{1+y'^2}dx$ für $dx > 0$

Für $r = h(\varphi)$ gilt: $ds = \sqrt{r'^2 + r^2}d\varphi$ für $d\varphi > 0$ mit $r = h(\varphi) \wedge r' = h'(\varphi)$

KRÜMMUNG K: (S.237, 238)

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Für $y = f(x)$ gilt: $k(x) = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$

Für $x(t), y(t)$ gilt: $k(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}$ Für $r = h(\varphi)$ gilt: $k(\varphi) = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$

8. INTEGRALRECHNUNG (S. 443 FF.)

BESTIMMTE INTEGRALE: (S. 456 ff.)

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to \infty \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Eigenschaften des bestimmten Integrals: (S.460)

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right] = [f(x)] \cdot [x] \qquad \int_{x_1=a}^{x_2=b} f(x)dx = \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(t)dt$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$$ (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Bestimmtes Integral mit variabler oberer Grenze: (S. 458)

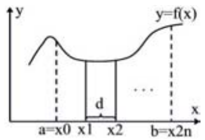
$F(x) = \int_{u_1=a}^{u_2=x} f(u)du$ f sei stetig → $\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x)$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: (S. 457, 474)

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)\,|_a^b$$ wobei $F'(x) = f(x)$

NUMERISCHE INTEGRATION

Simpson-Regel: (S.923)



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{d}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right]$$

DAS UNBESTIMMTE INTEGRAL: (S.443 ff)

$[F(x)+C]' = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + x$ $\frac{d}{dx}$ und $\int dx$ sind inverse Operationen

GRUNDINTEGRALE: (S. 445 & S. 1049 ff.)

INTEGRATIONSREGELN: (S 444 ff.)

a) Integrand mit konst. Faktor: $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

b) Integration einer Summe oder Differenz: $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)ds$

c) Partielle Integration: $\int \underbrace{u(x) \cdot v'(x)}_{f(x)}dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx$

In bestimmten Integralen: $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

$x\cos(x) \mapsto u(x) = x$ $x\ln(x) \mapsto u(x) = \ln(x)$ $xe^x \to u(x) = x$

d) Partialbruchzerlegung (S.448, 449, 450)
   1. Unechte Polynombrüche in echte Polynombrüche mittels Polynomdivision bringen
   2. Durch kürzen dafür sorgen, dass der Koeffizient bei der höchsten Potenz des Nennerpolynoms gleich 1 wird.
   3. Das Nennerpolynom in Linearfaktoren zerlegen

Fall 1: Das Nennerpolynom hat nur einfache reelle Nullstellen

Ansatz: $I = \int \underbrace{x^2 + x + Cdx}_{PolynomVonPolynomdivision} + \underbrace{\int I_1 dx}_{RestVonPolynomdivision}$

$\underbrace{\frac{Z(x)}{N(x)}}_{I_1} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \ldots$ → Hauptnenner → $Z(x) = A(x-x_2) + B(x-x_1)$

Nullstellen des Nenners einsetzen: $\frac{Z(x)}{N(x)} = Partialbrüche$

$I = \int \ldots + \int 1.Partialbruch + \int 2.Partialbruch + \ldots$

Fall 2: Das Nennerpolynom hat mehrfache reelle Nullstellen, z.B. die Nullstelle x_r 2-fach.

Ansatz: $\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{A}{(x-x_r)} + \frac{B}{(x-x_r)^2} + \frac{C}{(x-x_0)}$ → Hauptnenner →

$Z(x) = A(x-x_r)(x-x_0) + B(x-x_0) + C(x-x_r)^2$

Nullstellen des Nenners + evt. frei gewählte x auf beiden Seiten einsetzen:

$I = \int \ldots + \int 1.Partialbruch + \int 2.Partialbruch + \ldots$

Fall 3: Das Nennerpolynom hat neben reellen Nullstellen auch einfache Paare konjugiert komplexer Nullstellen.

Ansatz: Die Nullstellen des Nenners nicht in komplexer Form angeben: $\underbrace{x^2 + px + q}_{p^2 < 4q} = 0$

$\frac{Z(x)}{N(x)} = \underbrace{\frac{A}{(x-x_0)}}_{reell} + \underbrace{\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)}}_{komplex}$ → Hauptnenner →

$Z(x) = A(x^2+px+q) + (Bx+C)(x-x_0)$ → Nach Potenzen von x sortieren → Koeffizientenvergleich

$I = \int \ldots + \int 1.Partialbruch + \int 2.Partialbruch + \ldots$

Fall 4: Das Nennerpolynom hat auch mehrfache komplexe Nullstellen

Ansatz: Die Nullstellen in folgender Form angeben: $(x^2+p)^k$

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+p)} + \frac{Cx+D}{(x^2+p)^2}$$ → Hauptnenner → $Z(x) = (Ax+B)(x^2+p) + (Cx+D)$

→ Nach Potenzen von x Sortieren → Koeffizientenvergleich

$$I = \int ... + \int 1.Partialbruch + \int 2.Partialbruch + ...$$

Wichtige Stammfunktionen zur Partialbruchzerlegung: (S. 1055 21.5.1.7)

$$\int \frac{dx}{(x-x_r)} = \ln|x-x_r| + C \qquad \int \frac{dx}{(x-x_r)^i} = -\frac{1}{(i-1)}\frac{1}{(x-x_r)^{i-1}} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+px+q)} = \frac{1}{2}\ln|x^2+px+q| - \frac{p}{2}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^i} = \frac{1}{(i-1)(4q-p^2)}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{i-1}} + \frac{2(2i-3)}{(i-1)(4q-p^2)}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{i-1}}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+px+q)^i} = \frac{1}{(i-1)(p^2-4q)}\frac{px+2q}{(x^2+px+q)^{i-1}} + \frac{(2i-3)p}{(i-1)(p^2-4q)}\int \frac{dx}{(x^2+px+p)^{i-1}}$$

e) Substitution: (446, 450 – 456)

a) $\int f(\underbrace{\varphi(x)}_{v}) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{dv} = \int f(v)dv$ mit $v = \varphi(x); dv = \varphi'(x)dx$

$$u = ... \Rightarrow \frac{du}{dx} = (...)' \Rightarrow dx = \frac{du}{(...)'}$$

Sonderfälle: $\int \varphi(x)\cdot\varphi' dx = \frac{1}{2}\varphi^2(x) + C$ $\qquad \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + C$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

b) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$ mit $x = \varphi(z); dx = \varphi'(z)dz$

Substitution in bestimmten Integralen:

Methode 1: Zur Berechnung integriert man zunächst unbestimmt (Substitution → Resubstitution) und wendet dann den Hauptsatz an.

Methode 2: Man integriert sofort bestimmt und maß dann beim Substituieren die Grenzen Mittransformieren.

UNEIGENTLICHE INTEGRALE: (S. 470)

$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ Das Integral heißt konvergent (divergent), wenn der rechte Grenzwert existiert.

Analog verfährt man bei $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

f(x) sei für x = a unbeschränkt, für $a < x \le b$ jedoch beschränkt. Dann sei $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ Das Integral heißt konvergent (divergent), wenn der rechte Grenzwert existiert.

ANWENDUNG: (S. 463 ff.)

Inhalte ebener Flächenstücke

Falls Flächenstück über und unter der x-Achse liegt: Addition der Flächenstücke

Fläche, die von zwei Graphen begrenzt wird: $A = \int_{x1}^{x2}[f(x)-g(x)]dx$ (obere Fkt. – untere Fkt.)

Begrenzungskurve in Parameterdarstellung: $A = \int_{x1}^{x2} ydx = \int_{t1}^{t2} y\underbrace{\dot{x}}_{f(t)}dt$ z.B.: $x(t) = a\cos(t); y(t) = b\sin(t)$

$$\Rightarrow A = \int b\sin(t)\cdot\underbrace{(-a\sin(t))}_{x(t)'=(a\cos(t))'}dt$$

Begrenzungskurve $r = h(\varphi)$: $A = \frac{1}{2}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} r^2 d\varphi$

Bogenlänge s einer ebenen Kurve C:

$s = \int_C ds$ ds (Bogenelement) siehe Kap. 7 (S. 4; FS. S. 234)

Mittelwert & Effektivwert

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_{t0}^{t0+T} f(t)dt \qquad F^2 = \overline{f^2(t)}$$

9. UNENDLICHE REIHEN (S. 419 FF.; S. 1041 FF.)

PARTIALSUMMEN: (S. 420, 421)

Zu jeder Reihe $\sum_{i=1}^k a_i$ kann man die Folge $\{S_1; S_2; ...\}$ der sog. Partialsummen $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$ bilden:

$$S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3; ...$$

Besitzt die Folge $\{S_1; S_2; ...\}$ einen Grenzwert $S = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^k a_i$ so schreibt man $S = \sum_{i=1}^\infty a_i$ (Die Reihe heißt dann konvergent mit der Summe S). Existiert kein Grenzwert, so heißt die Reihe divergent).

Harmonische Reihen (S. 421) sind divergent.

GEOMETRISCHE REIHEN: (S. 421, S. 19)

$$\sum_{i=1}^\infty \underbrace{aq^{i-1}}_{a_i} = a + aq + aq^2 + ...(a, q \ne 0) \qquad q = \frac{a_{i+1}}{a_i} \text{ (für alle i)}$$

$$S_k = \sum_{i=1}^k aq^{i-1} \quad \Rightarrow \quad S_k = a\cdot\frac{1-q^k}{1-q}; (q \ne 1)$$

Eine geometrische Reihe ist konvergent, falls $|q| < 1$ mit $S = \frac{a}{1-q}$

Eine geometrische Reihe ist divergent, falls $|q| \ge 1$

KONVERGENZKRITERIEN: (S. 421 ff.)

a) Notwendiges Konvergenzkriterium (S. 421, 422)

$$\sum_i a_i = konvergent \Rightarrow \lim_{i\to\infty} a_i = 0 \Leftrightarrow \lim_{i\to\infty} a_i \neq 0 \Rightarrow \sum_i a_i = divergent$$

b) Quotientenkriterium (S. 422, 423)

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_i+1}{a_1}\right| > 1 \Rightarrow Konvergenz \qquad \lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_i+1}{a_1}\right| < 1 \Rightarrow Divergenz \qquad \lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_i+1}{a_1}\right| = 1 \Rightarrow KeineAussage$$

c) Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen (S. 425)

Für jede monoton fallende Nullfolge $a_1, a_2, a_3,...$ konvergiert die alternierende Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 \mp ...$ Für die Approximation der Reihensumme S durch die

Partialsumme $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ gilt die Fehlerabschätzung $0 \le |S - S_n| \le a_{n+1}$.

Wird eine alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - ...$ nach dem n-ten Glied abgebrochen, dann ist der Fehler $|S - S_n|$ kleiner gleich dem ersten weggelassenen Reihenglied.

ABSOLUTE KONVERGENZ: (S.424)

Die Reihe $\sum_i a_i$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_i |a_i|$ konvergiert.

Satz 1: Wenn $\sum_i |a_i|$ konvergiert, dann auch $\sum_i a_i$.

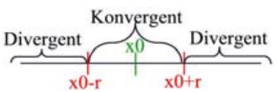
Satz 2: Durch Umordnen von unendlich vielen Reihengliedern ändert sich in einer absolut konvergenten Reihe die Reihensumme nicht.

REELLE POTENZREIHEN: (S. 431)

Für eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i$ existiere der Grenzwert $r = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{c_i}{c_{i+1}}\right| \ge 0$ (sog. Konvergenzradius der Reihe). Dann ist die Reihe

Absolut konvergent für alle x mit $|x - x_0| < r$

Divergent für alle x mit $|x - x_0| > r$



Je weiter die Entwicklungsstelle x_0 entfernt ist, desto langsamer konv. die Reihe.

Der Konvergenzradius r für Potenzreihen mit regelmäßigen Lücken:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{m+k\cdot n}; (m, n \in N)$ Auftretente Exponenten $m, m+n, m+2n, m+3n, ...$

$$r = \sqrt[n]{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|}$$

DIFFERENTIATION UND INTEGRATION VON POTENZREIHEN:

Differenziert oder integriert man eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i$ gliedweise, so erhält man die Potenzreihen für $f'(x)$ bzw. für $\int f(x)dx$. Sie haben x_0 und r mit der ursprünglichen Reihe gemeinsam.

TAYLORREIHEN: (S. 433)

$y = f(x)$ sei in $x = x_0$ mind. n mal differenzierbar.

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}}_{a_i} \cdot (x - x_0)^i$ heißt n-tes Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt x_0 . Im Fall $x_0 = 0$ heißt das Taylorpolynom auch Mac-Laurin-Polynom. Z.B.:

$f(x) = \cos x; f'(x) = -\sin x; f''(x) = -\cos(x)$

$$a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} \Rightarrow P_0(x) = 1; a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{-1}{2!} \Rightarrow P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

DIE TAYLORFORMEL MIT RESTGLIEDABSCHÄTZUNG VON LAGRANGE: (S. 433)

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{Pn(x) n-tesTaylorpolynom} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{Rn(x) nachLagrange}$$

DIE BINOMIALREIHE:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}x^i; (\alpha \in R; |x| < 1)$$

Definition der Binomialkoeffizienten (S. 13)

$$\binom{p}{q} = \frac{1 \qquad falls \quad q = 0}{\frac{p(p-1)...(p-(p-1))}{q(q-1)...1} \quad je \quad qFaktoren} \qquad \text{für } p \in R; q \in N_0$$

Eigenschaften von $\binom{n}{k}$ für $(n,k) \in N_0$:

$\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Beispiele zur Binomialreihe: $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\frac{-1}{2}}{i}x^i$

Binomialsatz:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}x^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$$

Mit $x = \frac{b}{a}$ erhält man eine allgemeinere Form des Binomialsatzes: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$

ENTWICKLUNG EINER FUNKTION Y=F(X) AN DER STELLE X=X_0 IN EINE POTENZREIHE:

a) Mit der Taylorformel und dem Nachweis, dass $\lim_{n\to\infty} R_n(x)00$

b) Verwendung von Reihen aus der Formelsammlung zu $x = 0$ und anschließend:
   1.) Addition
   2.) Substitution
   3.) Multiplikation, Division von Reihen
   4.) Bekannte Reihen differenzieren oder integrieren